FAU – UFRJ

GEOMETRIA DESCRITIVA II

Apostila de Apoio

Bibliografia:

CARVALHO, Benjamin de A. “Morfologia e Desenho das Curvas”. (Terceira Parte)
In: Desenho Geométrico. Rio de Janeiro. Ed. Ao Livro Técnico S. A.

RODRIGUES, Álvaro José. Geometria Descritiva. Volume II: Projetividades, Curvas e Superfícies. 1968. Rio de Janeiro. Ed. Ao Livro Técnico S.A.

Índice:

Curvas em Geral:

Definição de Curva: é o lugar geométrico das posições sucessivas de um ponto no espaço.

Classificação das Curvas:

1)Quanto à **curvatura**:

- plana (ou de uma curvatura) – só possui a curvatura de *flexão*.

- revessa (ou de duas curvaturas) – possui curvaturas de *flexão* e *torção*.

2)Quanto à **origem** (geração):

- geométrica – *obedece* a um *traçado geométrico*.
(ex.: circunf./elipse/paráb./hipérbole, etc...)

- empírica (ou gráfica) – *não obedece* a um *traçado geométrico*.

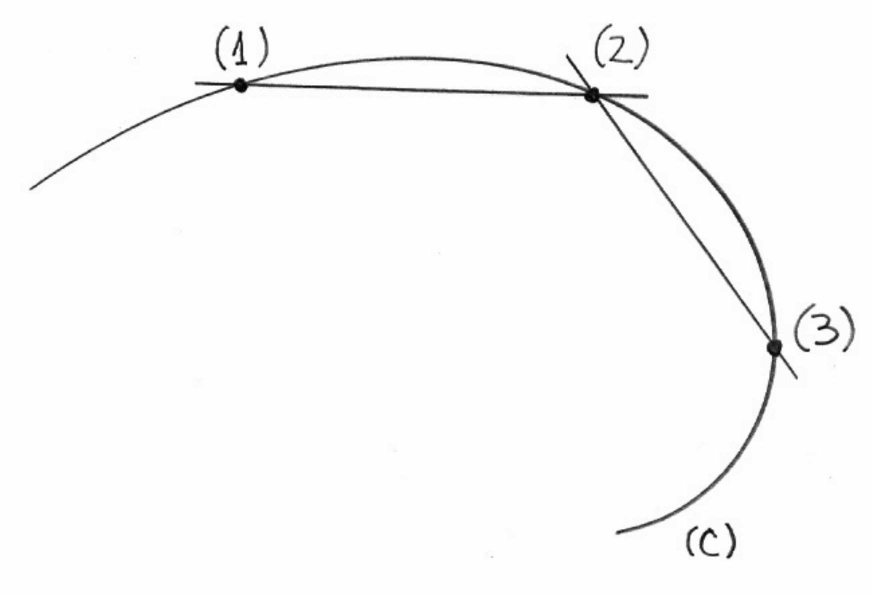
3)Quanto à **extensão:**

- finita (ou limitada)– todos os pontos são próprios, são curvas *fechadas*.
(ex.: circunf./elipse)

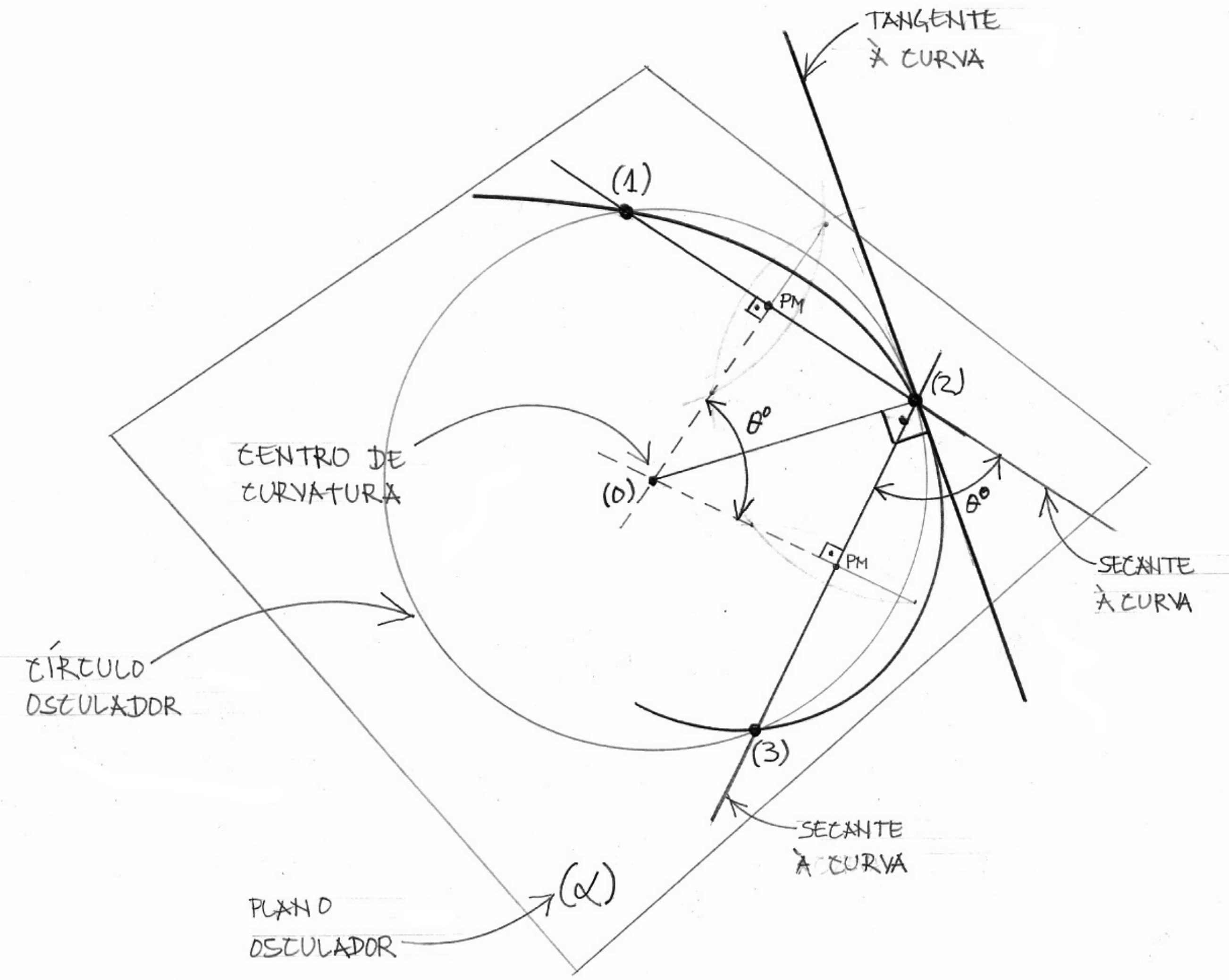
- infinita (ou ilimitada) – tem pontos impróprios, são curvas *abertas*.
(ex.: parábola/hipérbole)

Elementos Geométricos da Curva:

Elemento retilíneo de uma curva:
É o segmento de reta compreendido entre dois pontos infinitamente próximos de uma curva.

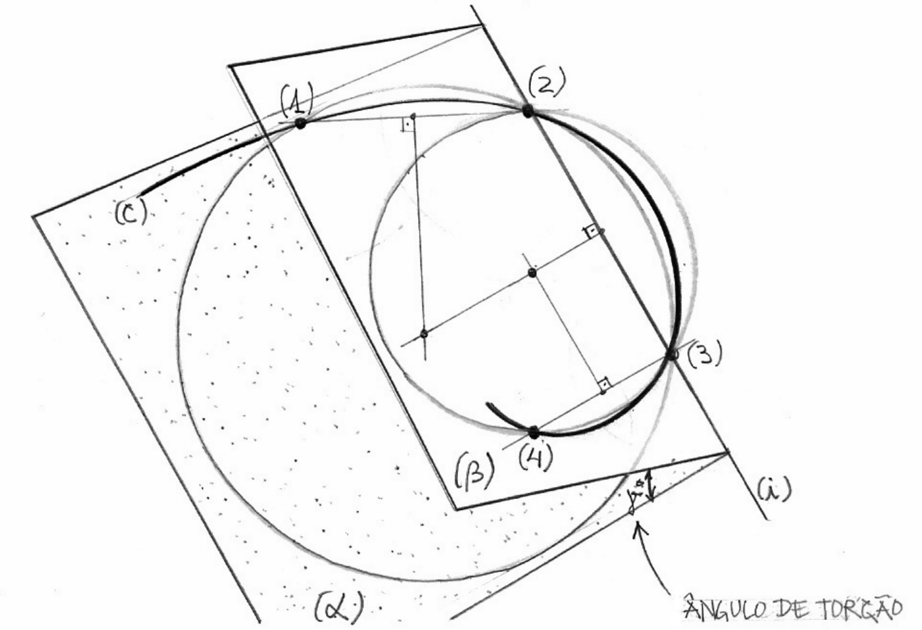


Ex.: (1)(2) e (2)(3) são dois segmentos retilíneos, sendo (1), (2) e (3) pontos infinitamente próximos da curva (c).



Ângulo de Flexão:	O ângulo de flexão da curva no ponto (2) - θ°, é o ângulo entre os segmentos retilíneos imediatamente anterior e posterior ao ponto (2).
Tangente à Curva:	A tangente à curva no ponto (2) é a posição limite entre as secantes à curva neste ponto.
Centro de Curvatura:	O centro de curvatura da curva no ponto (2) – (O) é determinado traçando-se perpendiculares pelos pontos médios dos segmentos retilíneos (1)(2) e (2)(3) (mediatrizes dos segmentos). O ponto de concorrência entre estas mediatrizes determina o centro de curvatura.
Normal à Curva:	(O)(2) é a normal à curva no ponto (2), é sempre perpendicular à tangente neste ponto. É a bissetriz do ângulo formado pelas cordas (1)(2) e (2)(3), contém o raio de curvatura da curva neste ponto.
Plano Osculador:	(α) é o plano osculador da curva no ponto (2). É o plano definido pela normal à curva e pela tangente à curva neste ponto. O plano osculador contém o círculo osculador.
Círculo Osculador:	é a circunferência que passa pelos pontos (1), (2) e (3) e cujo centro é o centro de curvatura da curva no ponto (2).

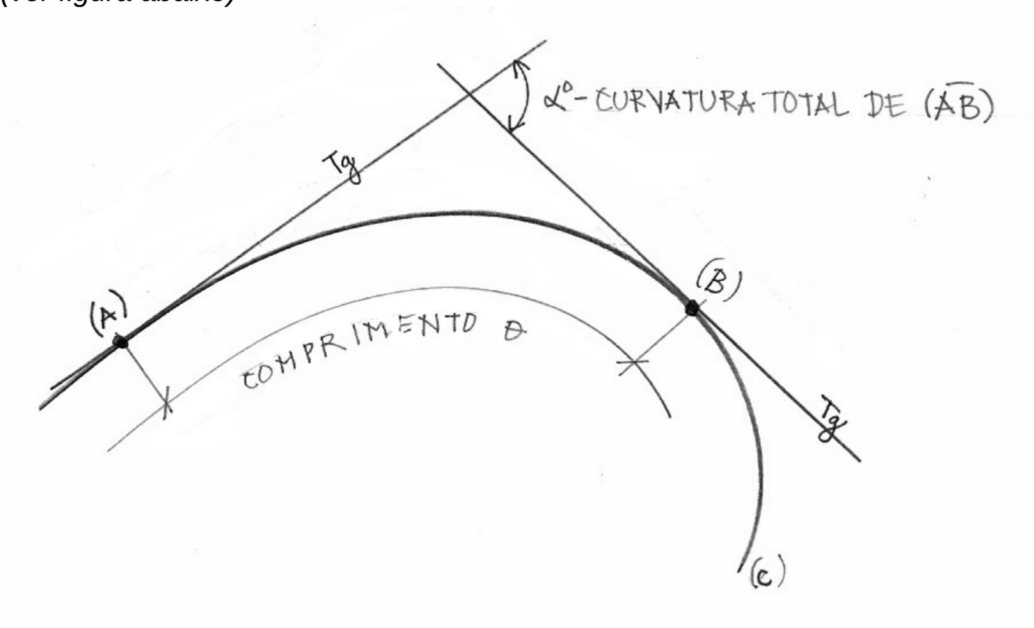
Obs.: se considerarmos, por exemplo, o ponto (3), teremos para este ponto todos os elementos geométricos que tivemos para o ponto (2). Teríamos inclusive um novo plano osculador (β) para a curva no ponto (3), definido por (2)(3) e (3)(4). *(ver figura abaixo).*



Ângulo de Torção: O ângulo de torção da curva é dado pelo ângulo formado pelos planos osculadores (α) e (β). *(ver figura acima)*
Obs: se o ângulo de *torção* for *zero* a curva é *plana* e se o ângulo de *flexão* for *zero* a curva se torna uma *reta*.

Curvatura Total de um Arco Finito de Curva:

É o ângulo formado pelas tangentes à curva nas extremidades do arco (A)(B).
(ver figura abaixo)



α° = é sempre o menor ângulo.
θ = é o comprimento do arco retificado.

Curvas de Erro:

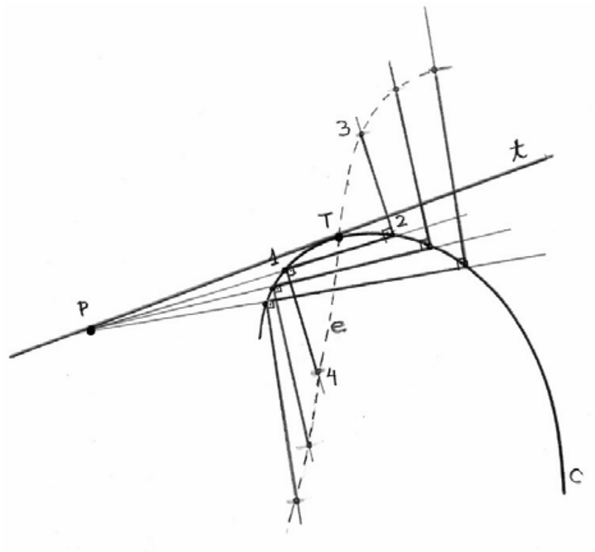
Definição: são curvas que nos auxiliam na exatidão de alguns traçados gráficos.

Algumas aplicações das curvas de erro:

Traçados de tangente a uma curva:

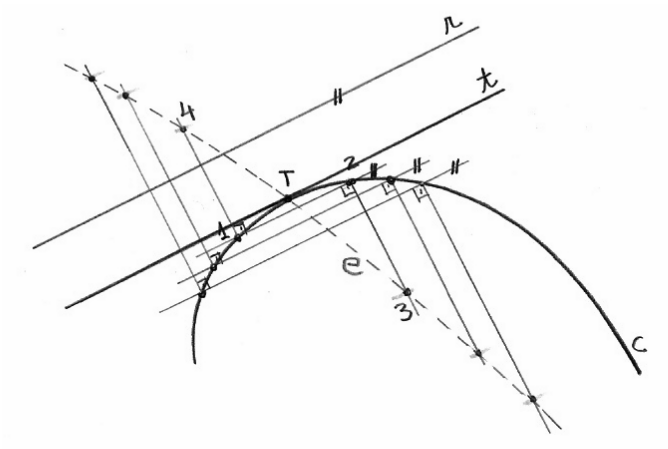
1) Por um ponto externo:

c - curva
P – ponto dado
T – ponto de tangência
t - tangente
12 = 23 = 14
e – curva de erro



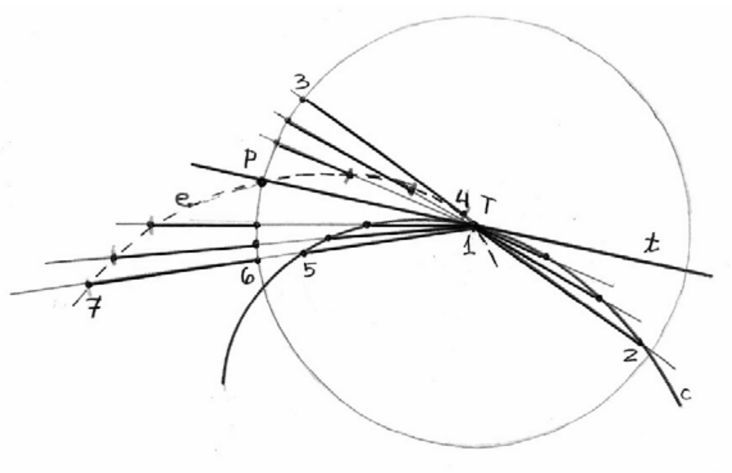
2) Paralela a uma reta dada:

c - curva
r – reta dada
T – ponto de tangência
t - tangente
12 = 23 = 14
e – curva de erro



3) Por um ponto da curva:

c - curva
T – ponto de tangência (dado)
e centro da circunferência
t – tangente
12 = 34
15 = 67
e – curva de erro



Classificação das Superfícies Geométricas[1]:

<table>
<tr><td rowspan="2">Superfícies Retilíneas
(geradas pela reta)</td><td colspan="2">Desenvolvíveis
(podem ser planificadas)</td><td>- de aresta de reversão; (ex.: helicóide desenvolvível)
- cônicas em geral;
- cilíndricas em geral.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reversas
(não podem ser planificadas)</td><td>- hiperbolóide escaleno ou elíptico de uma folha;
- parabolóide hiperbólico;
- conóide;
- cilindróide;
- helicóides:
- de plano diretor (axial e não-axial);
- de cone diretor (axial e não-axial).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Superfícies Propriamente Curvas (geradas pelas cônicas)</td><td rowspan="2">Circulares</td><td>de Revolução</td><td>- esfera;
- cone de revolução;
- cilindro de revolução;
- elipsóide de revolução:
- alongado;
- achatado.
- parabolóide de revolução;
- hiperbolóide de revolução:
- de 1 folha;
- de 2 folhas.</td></tr>
<tr><td>de Circunvolução</td><td>- toro circular:
aberto;
fechado;
reentrante.
- helicóides circulares:
- serpentina
- coluna torsa;
- parafuso de Santo Egídio.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Quádricas
(geradas pela elipse, parábola e hipérbole).</td><td>de 1ª Espécie</td><td>- cone de 2ª ordem (diretriz elíptica);
- cilindro de 2ª ordem:
- elíptico;
- hiperbólico;
- parabólico
- elipsóide escaleno*;
- parabolóide escaleno ou elíptico*;
- hiperbolóide escaleno de 2 folhas*
*(qualquer seção produz elipse).</td></tr>
<tr><td>de 2ª Espécie.</td><td>- toro:
- elíptico;
- hiperbólico;
- parabólico.
- superfícies topográficas geométricas.</td></tr>
</table>

[1] Álvaro José Rodrigues. Geometria Descritiva. Volume II: Projetividades, Curvas e Superfícies – 1968. Rio de Janeiro. Ed. Ao Livro Técnico S.A. pp.267.

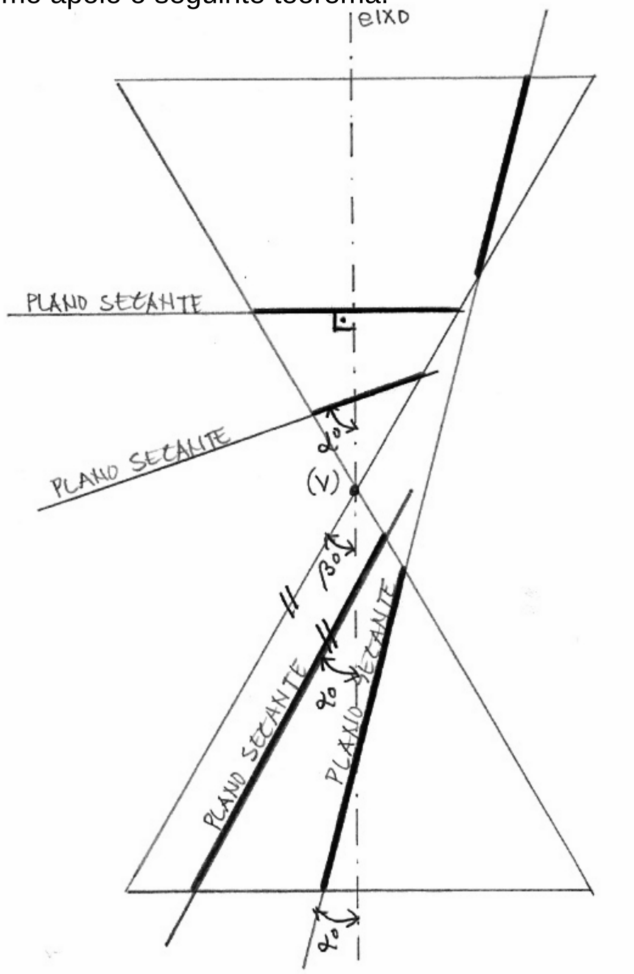
Cônicas:

Definição: são as curvas obtidas ao seccionarmos uma superfície cônica de revolução.

Logo uma curva obtida por um plano secante perpendicular ao eixo de uma superfície cônica de revolução produziria uma circunferência e esta seria por conseqüência uma curva definida como **cônica**. Para imaginarmos outras possibilidades de seções produzindo outros tipos de curvas, que serão também chamadas de **cônicas**, usaremos como apoio o seguinte teorema:

Teorema de Apollonius[2]:

"A seção feita em uma superfície cônica de revolução por um plano será uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, segundo o plano secante faça com o eixo da superfície cônica um ângulo que seja superior, igual ou inferior ao semi-ângulo do vértice da superfície cônica de revolução".



$\alpha° > \beta°$ - elipse

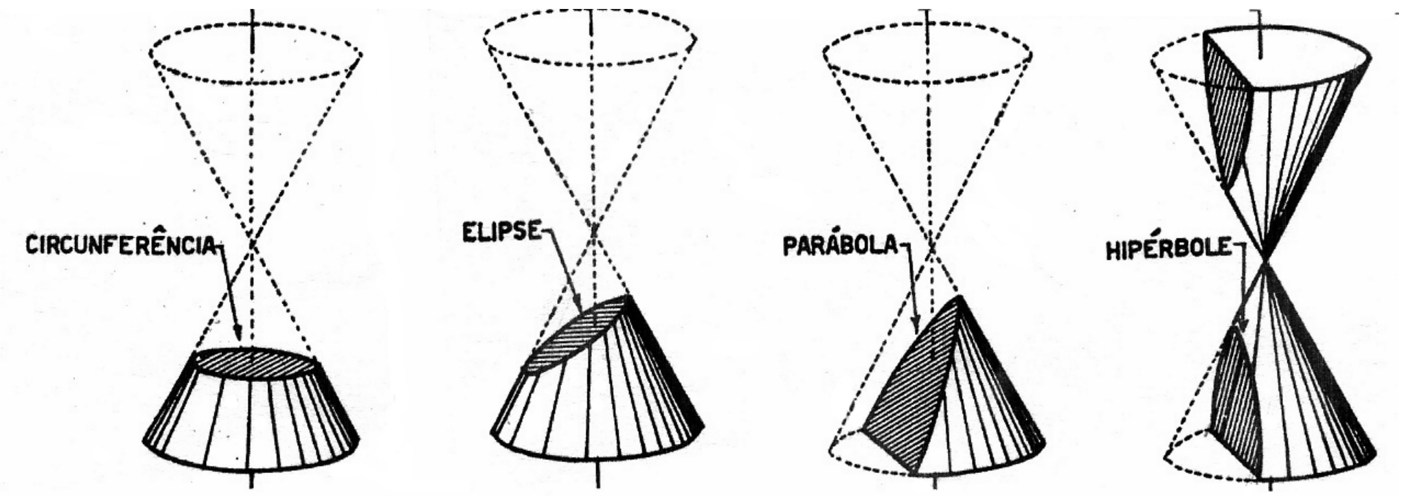
$\alpha° = \beta°$ - parábola

$\alpha° < \beta°$ - hipérbole

Obs.:

$\alpha°$- ângulo que o plano secante faz com o eixo da superfície cônica de revolução.

$\beta°$- semi-ângulo do vértice da superfície cônica de revolução.



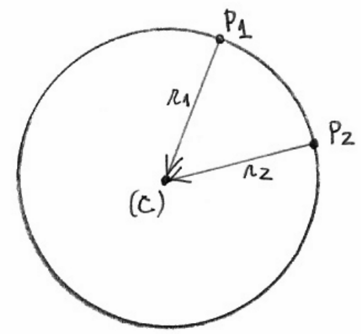
[2] Álvaro José Rodrigues. Geometria Descritiva. Volume II: Projetividades, Curvas e Superfícies – 1968. Rio de Janeiro. Ed. Ao Livro Técnico S.A. pp.108.

<u>Propriedades Geométricas das Cônicas</u>:

Circunferência:

- É uma curva plana, geométrica e finita (fechada).

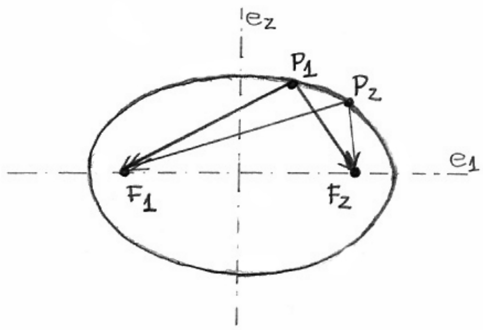
- Na circunferência é constante a <u>distância</u> (raio) de cada um de seus pontos a um ponto fixo chamado de <u>centro</u>.



Elipse:

- É uma curva plana, geométrica e finita (fechada).

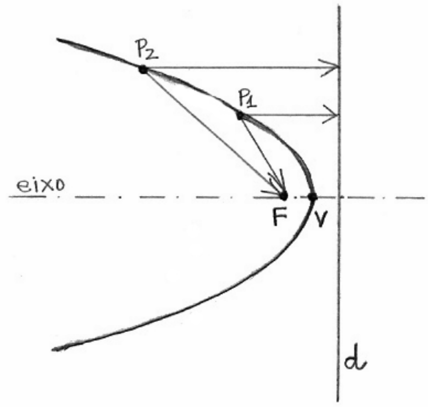
- Na elipse é constante a <u>soma</u> das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos chamados de <u>focos</u>.



Parábola:

- É uma curva plana, geométrica e infinita (aberta), de <u>um só ramo</u>.

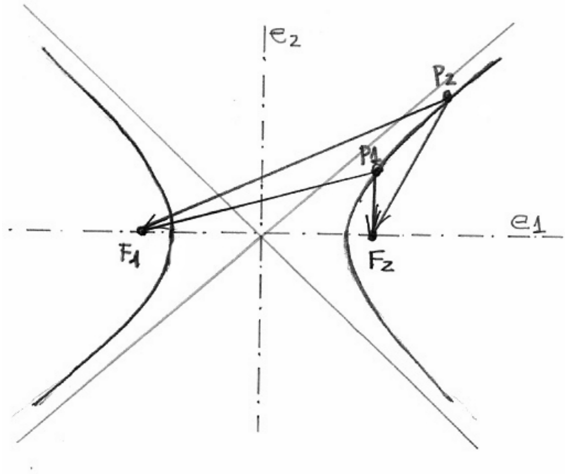
- Na parábola cada um de seus pontos <u>eqüidista</u> de um ponto fixo chamado de <u>foco</u> e de uma reta fixa chamada <u>diretriz</u>.



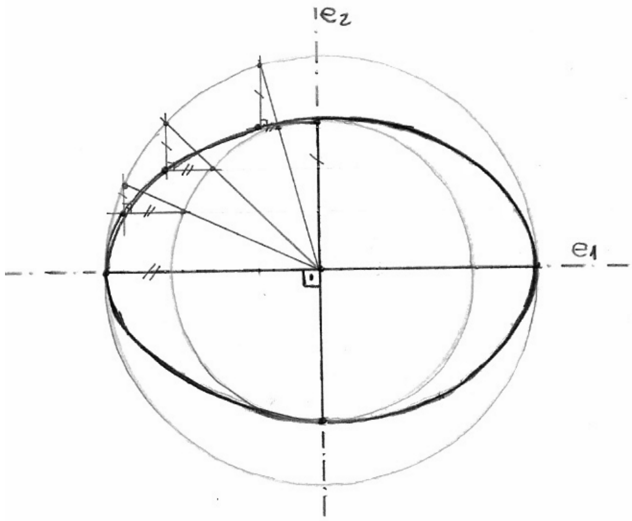
Hipérbole:

- É uma curva plana, geométrica e infinita (aberta), de <u>dois ramos</u>.

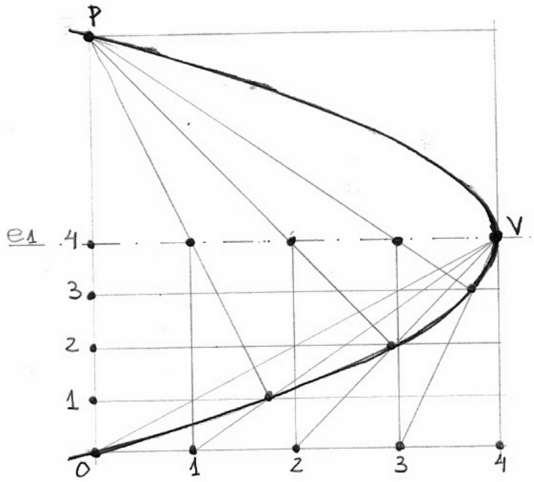
- Na hipérbole é constante a <u>diferença</u> das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos chamados de <u>focos</u>.



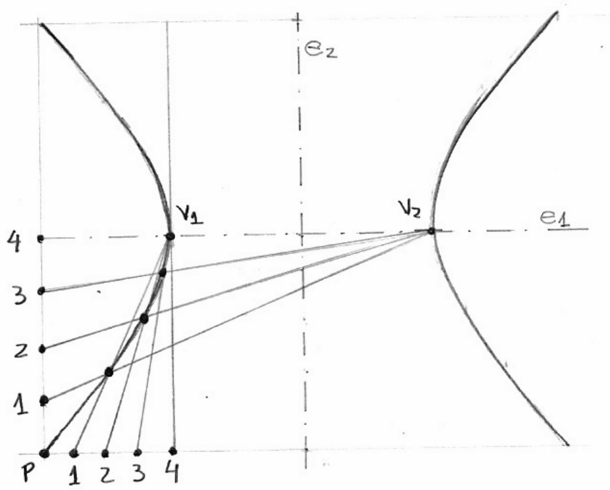
Alguns dos Traçados Auxiliares das Cônicas[3] :



Elipse:
Conhecidos os seus eixos



Parábola:
Conhecidos: eixo, vértice e um de seus pontos



Hipérbole:
Conhecidos os dois vértices e um de seus pontos

[3] Para demais traçados e detalhes consultar: Benjamin de A. Carvalho. “Morfologia e Desenho das Curvas”. (Terceira Parte) In: Desenho Geométrico. Rio de Janeiro. Ed. Ao Livro Técnico S. A. pp.211-317.

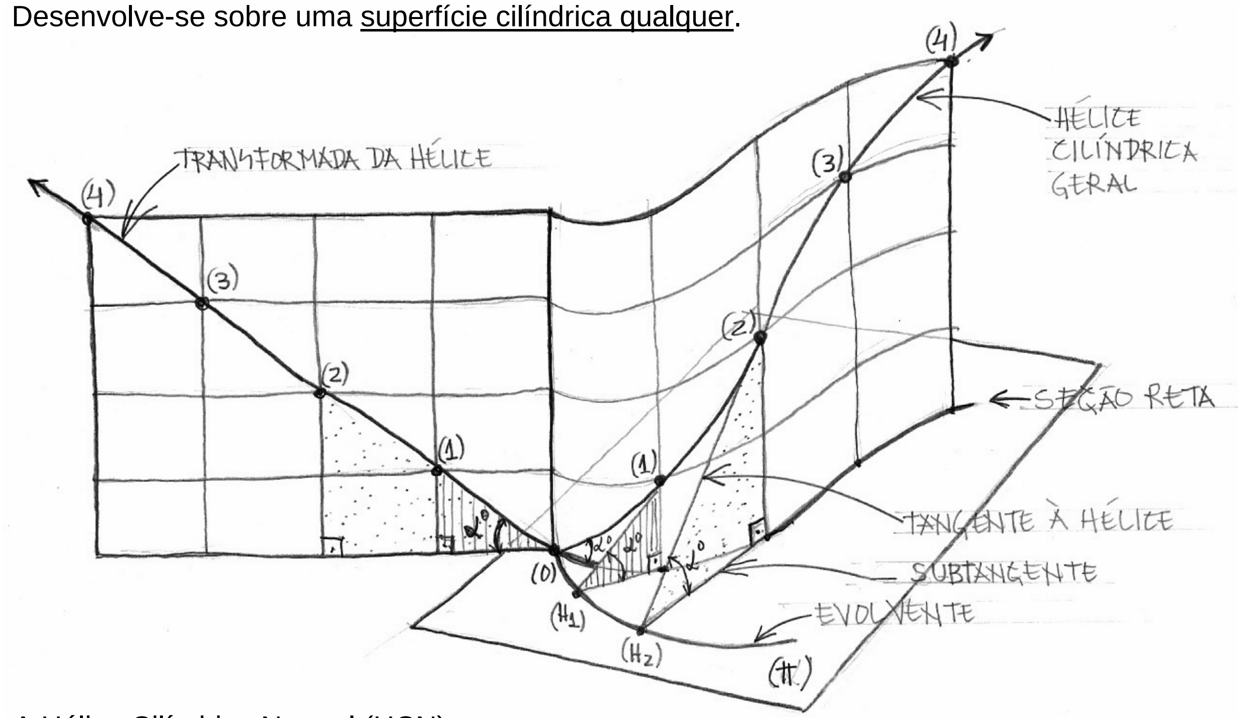
Hélice:

Definição: é a curva revessa resultante da justaposição de uma reta em uma superfície cilíndrica.

Temos dois tipos de Hélice Cilíndrica:

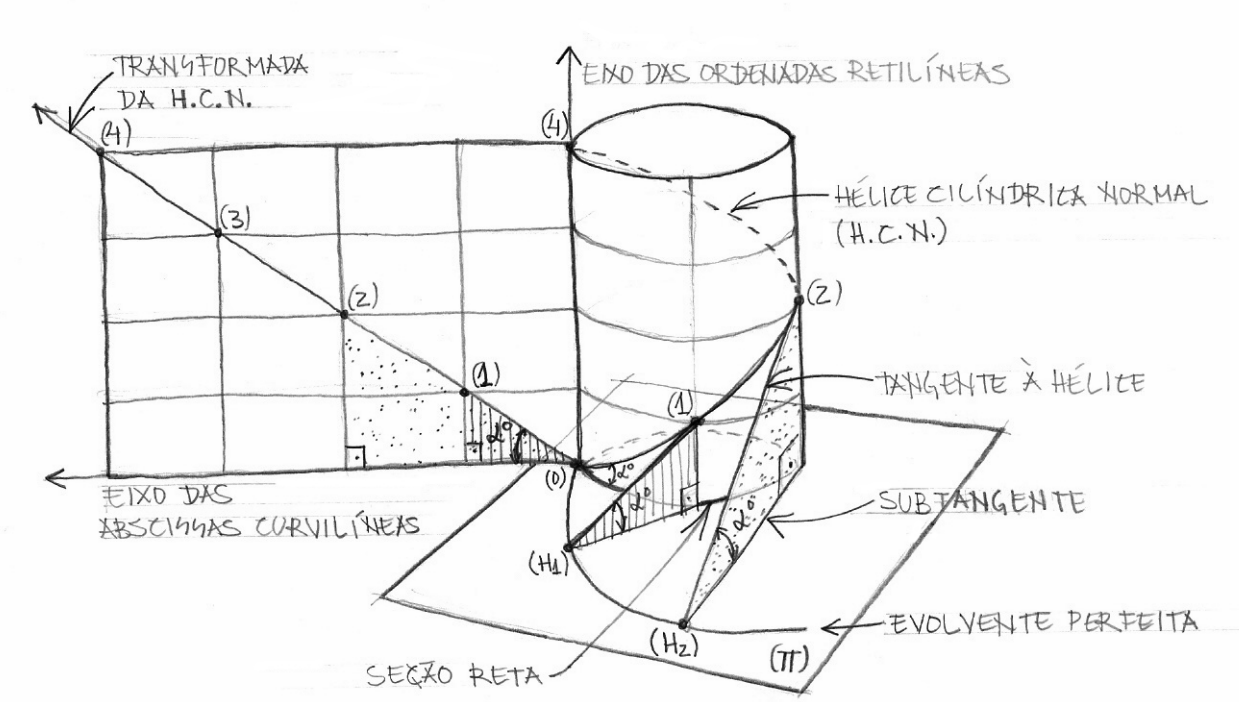
- A Hélice Cilíndrica Geral ou Ordinária:

  Desenvolve-se sobre uma superfície cilíndrica qualquer.



- A Hélice Cilíndrica Normal (HCN):

  Desenvolve-se sobre uma superfície cilíndrica de revolução.



Obs.: na Hélice Cilíndrica Normal (HCN) as curvaturas de torção e flexão são constantes.

Propriedades das Hélices:

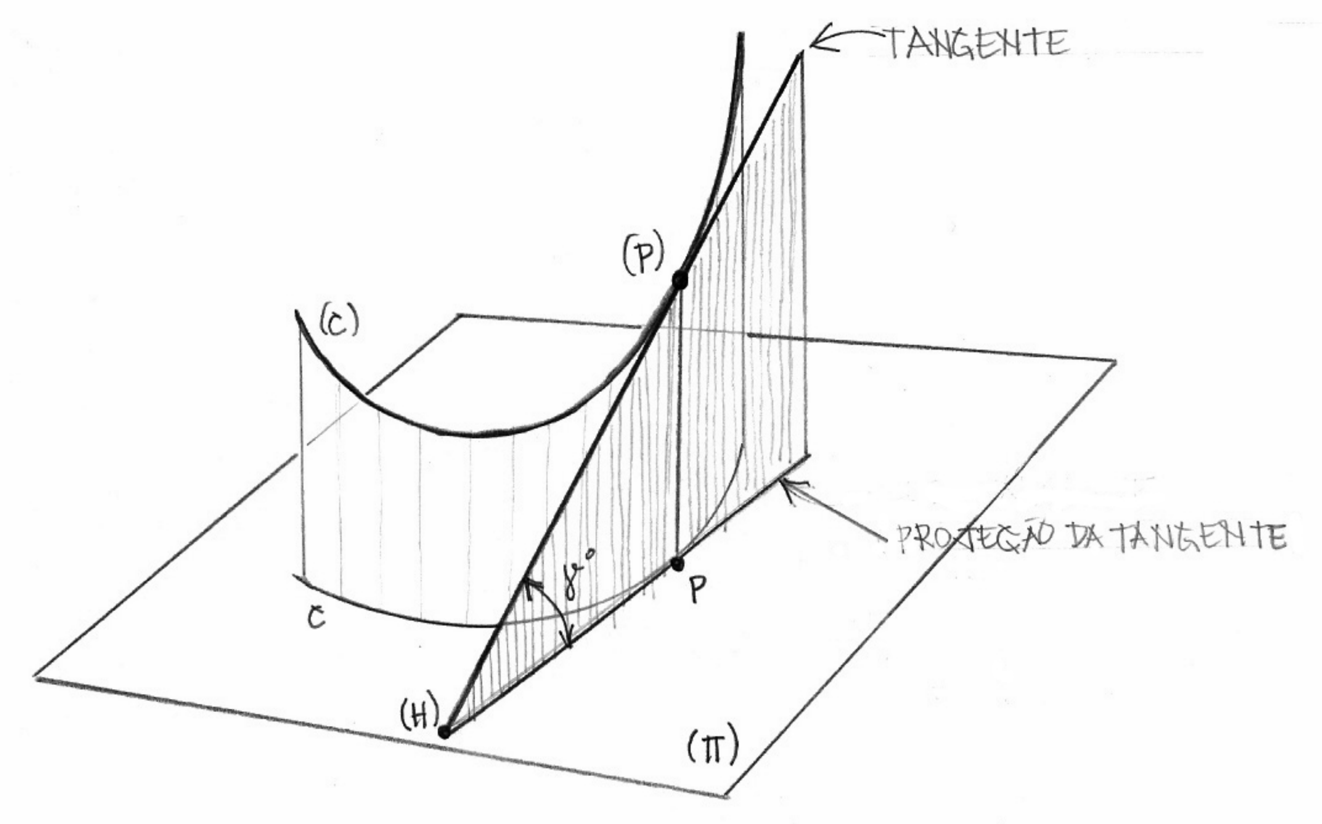
1. Há uma proporcionalidade entre as abscissas curvilíneas e as ordenadas retilíneas.

2. É a geodésica da superfície cilíndrica.
   Obs.: *geodésica de uma superfície* é a linha de uma superfície que mede a menor distância entre dois pontos desta mesma superfície.

3. É a loxodrômica da superfície cilíndrica.
   Obs.: *loxodrômica de uma superfície* é a linha de uma superfície que faz ângulo constante com as geratrizes desta superfície.

Ângulo de uma curva em um de seus pontos com um plano:

É o ângulo que a tangente à curva neste ponto (P) faz com a projeção desta tangente no plano.



Aplicando-se o que foi acima descrito para curvas em geral em nossas hélices cilíndricas, concluímos que:

- As tangentes aos pontos de uma hélice fazem um ângulo constante com um plano de seção reta da superfície cilíndrica.*(ver figuras da página anterior)*

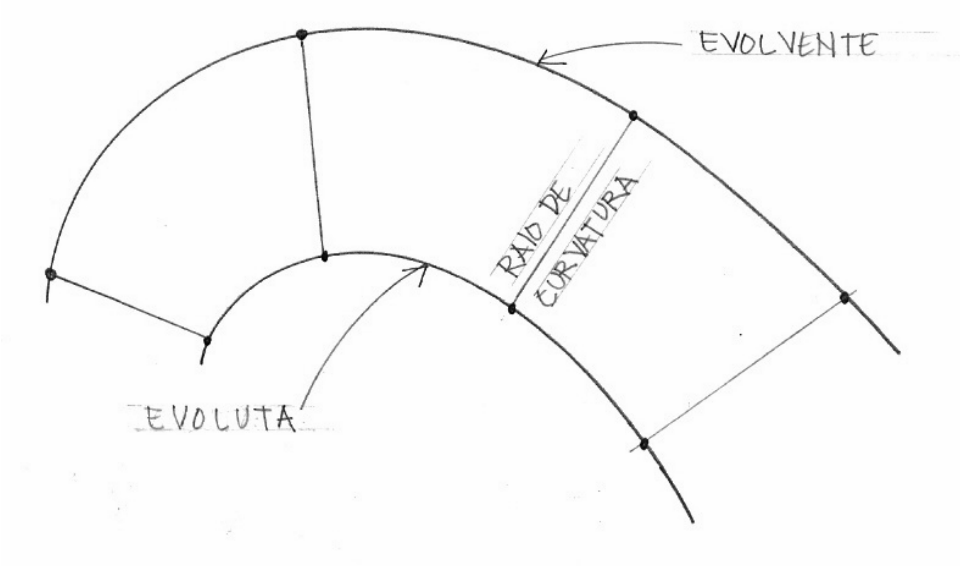
- O comprimento da tangente compreendido entre o ponto de contato com a hélice (ponto de tangência) até o ponto de contato com o plano de seção reta é igual ao respectivo arco de hélice retificado, assim como o comprimento da subtangente é igual ao respectivo arco de seção reta retificado. *(ver figuras da página anterior)*

Obs.: se chama "subtangente" a projeção da tangente a uma hélice neste plano de seção reta da superfície cilíndrica na qual a hélice se apóia. *(ver figuras da página anterior)*

Curva evoluta e Curva evolvente:

Curva evoluta: é o lugar geométrico dos centros de curvatura dos pontos da curva evolvente.

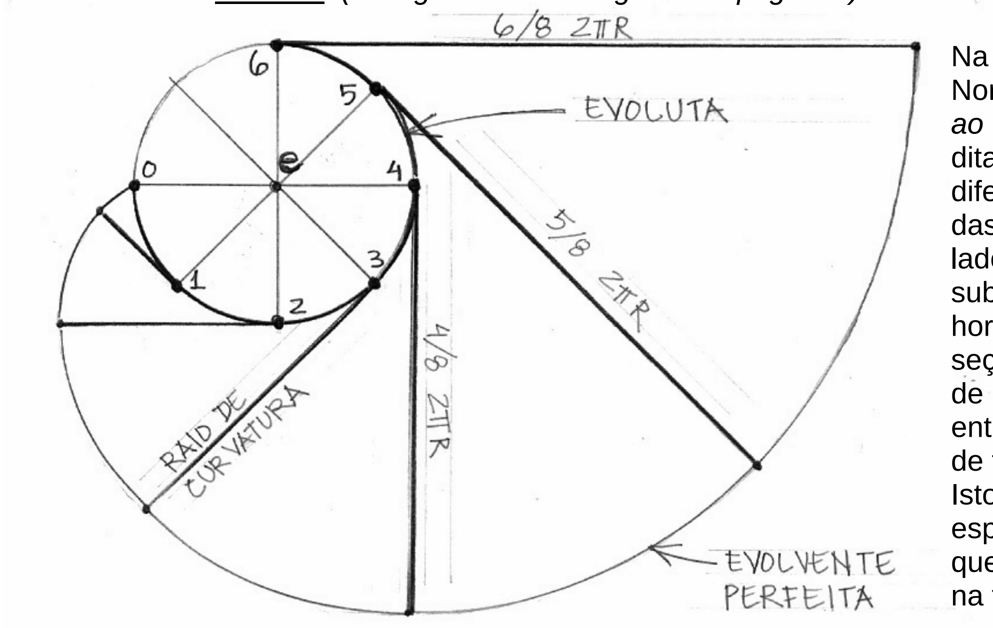
Curva evolvente: é a curva resultante de um traçado a partir da evoluta aplicando-se raios de curvatura para cada um dos pontos da evoluta.



Aplicando-se estes conceitos nas hélices pode-se afirmar que:

- O lugar geométrico dos pés das tangentes no plano de seção reta é a evolvente da hélice e da sua projeção neste mesmo plano de seção reta. *(ver figura abaixo e figuras da página 9)*

- A hélice e a curva de seção reta (que vem a ser sua projeção no plano de seção reta) são curvas evolutas. *(ver figura abaixo e figuras da página 9)*

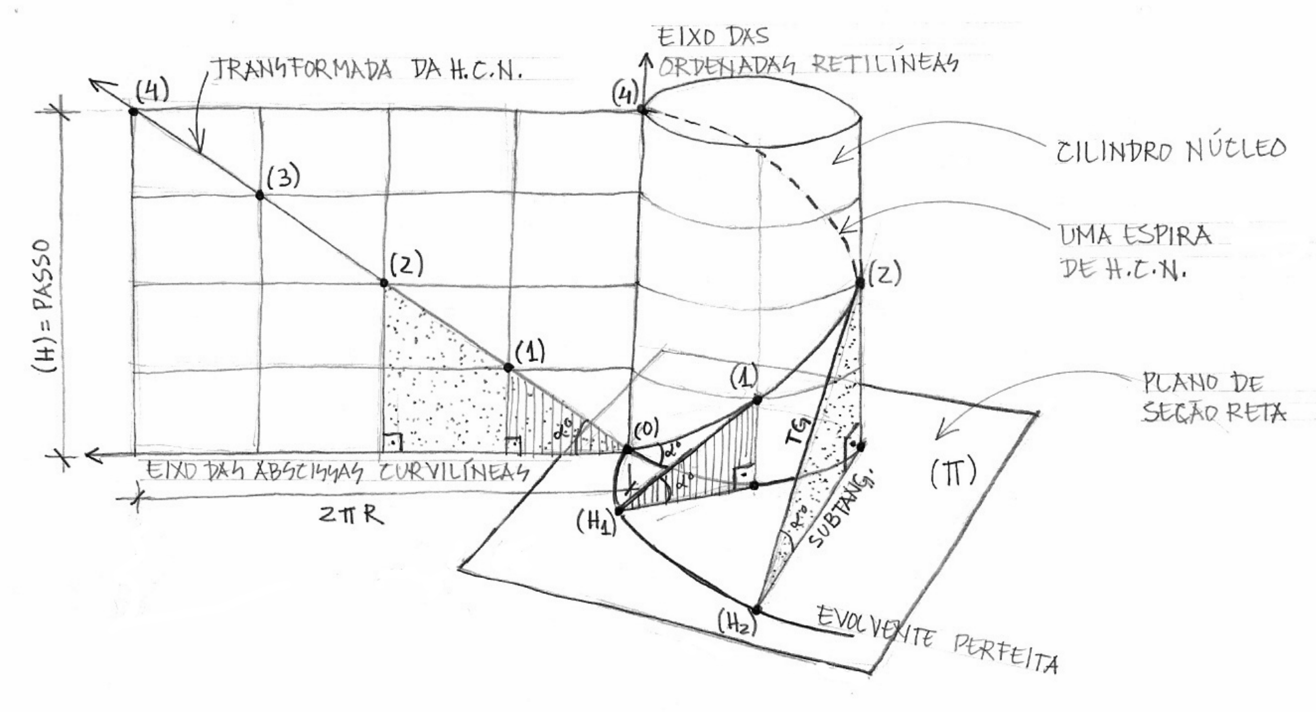


Na Hélice Cilíndrica Normal (HCN), *(exemplo ao lado),* a sua evolvente é dita perfeita porque a diferença de comprimento das tangentes (no caso ao lado se tratam das subtangentes em projeção horizontal sobre o plano de seção reta), é igual ao arco de curva compreendido entre dois de seus pontos de tangência.
Isto ocorrerá tanto no espaço como em projeção que é a maneira expressa na figura ao lado.

Figura acima: HCN e algumas de suas tangentes em projeção horizontal.
Obs.: eixo da superfície cilíndrica da HCN na posição vertical.

<u>Hélice Cilíndrica Normal (HCN) em particular</u>:

<u>Espira</u> de HCN:	é o <u>arco</u> de HCN compreendido <u>entre duas passagens</u> consecutivas por uma mesma geratriz da superfície cilíndrica.
<u>Passo</u> (H) de HCN:	é a <u>ordenada retilínea</u> correspondente a altura de <u>uma espira</u> de HCN.
<u>2πR</u>:	é a <u>abscissa curvilínea</u> correspondente a uma flexão (giro) de <u>360</u>° da HCN. (obs.: onde R é o raio da superfície cilíndrica de revolução ou do cilindro núcleo)



Logo em um giro de 360° de Hélice Cilíndrica Normal (HCN) temos:

- um arco de hélice = uma espira (de geratriz a geratriz)
- sua ordenada retilínea = um passo (H)
- sua abscissa curvilínea = 2πR

Observações:

- A altura do cilindro núcleo da HCN não é necessariamente igual à altura do passo podendo ser igual, maior ou menor que este.

- Para construção da HCN devemos dividir sempre em um <u>mesmo número de partes</u> o <u>passo (H)</u> (ordenada retilínea) e <u>2πR</u> (abscissa curvilínea).

Declividade da Hélice:

É uma constante, onde $\mathbf{K = \dfrac{H}{2\pi R}}$

Sinais da Hélice Cilíndrica Normal:

São <u>dois</u> os movimentos helicoidais:

- um <u>curvilíneo</u> - <u>rotação</u> (+) sentido positivo trigonométrico = anti-horário
  (-) sentido negativo trigonométrico = horário

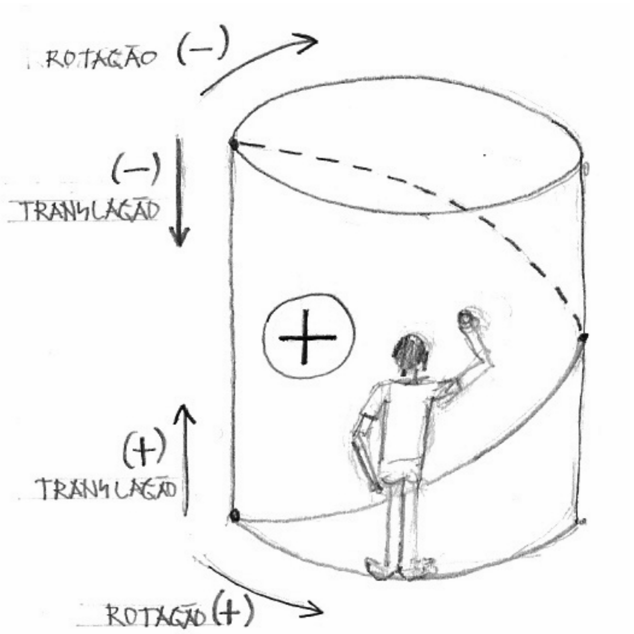
- um <u>retilíneo</u> - <u>translação</u> (+) para cima
  (-) para baixo

Tendo em vista estes dois movimentos a HCN pode ser de dois tipos:

Hélice <u>Positiva</u>:

Quando os dois movimentos
(o de rotação e o de translação)
tiverem o <u>mesmo sinal</u>.

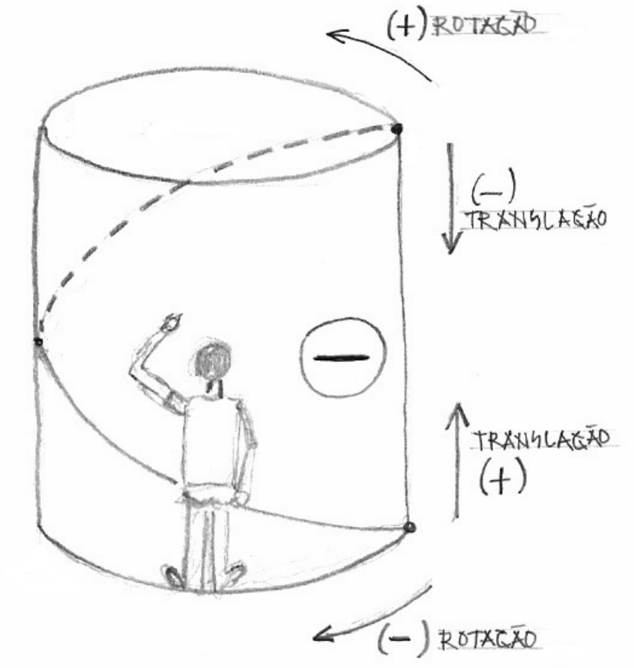
Dica: braço <u>direito</u> do bonequinho.



Hélice <u>Negativa</u>:

Quando os dois movimentos
(o de rotação e o de translação)
tiverem <u>sinais diferentes</u>.

Dica: braço <u>esquerdo</u> do bonequinho.

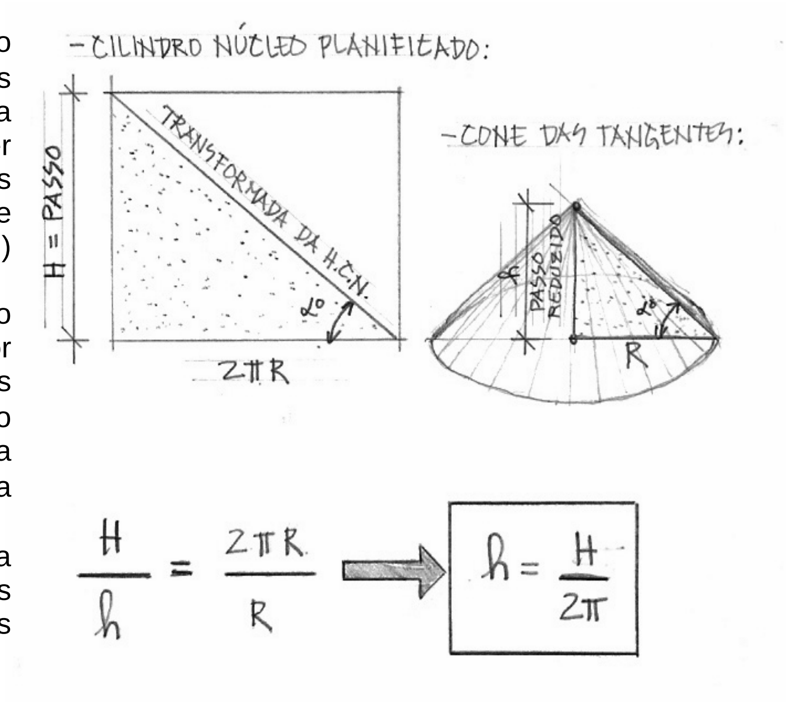


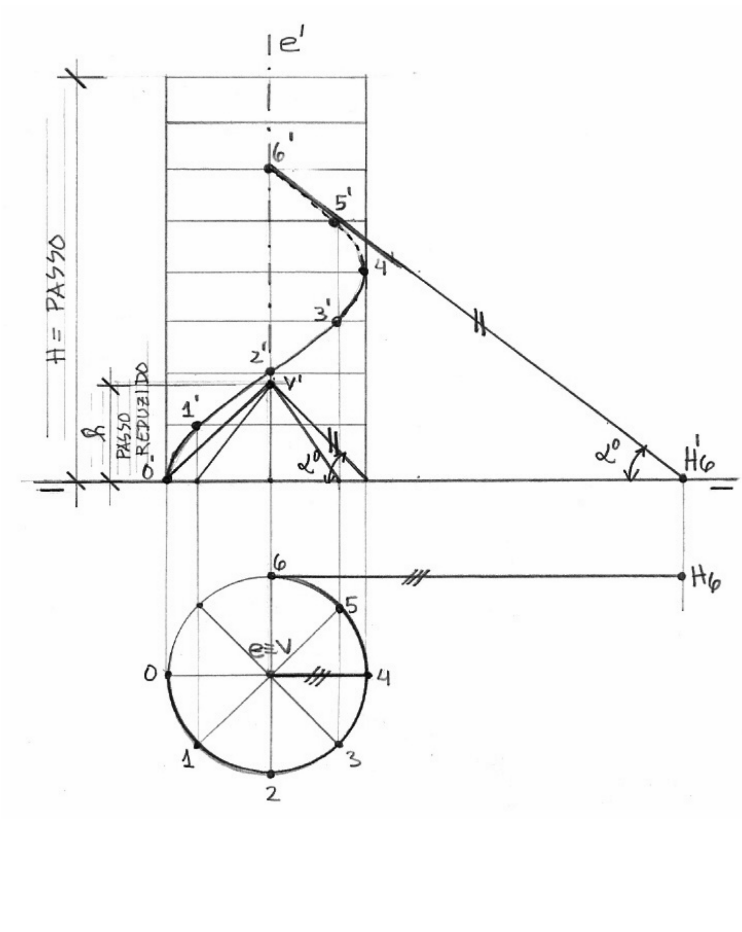
Dois Processos para Determinação de Tangentes à Hélice Cilíndrica Normal (HCN):

- Processo do <u>Cone das Tangentes</u>:

Construímos um cone que tenha sua base coincidente com a base do cilindro núcleo e de tal forma que suas geratrizes façam com (π) o mesmo ângulo que as tangentes à hélice fazem com (π), desta forma teremos geratrizes do cone paralelas às tangentes à hélice.

Como a HCN faz com (π) o mesmo ângulo que suas tangentes fazem com (π) vamos imaginar o cilindro núcleo planificado com a transformada da HCN e vamos estabelecer a semelhança de triângulos entre um dos triângulos formados pelas geratrizes do cone das tangentes, o raio (R) e a altura (h) (passo reduzido). *(ver figura ao lado).*
Desta forma calculamos o passo reduzido (h) obedecendo ao parâmetro de o seu valor ser tal que as geratrizes do cone das tangentes vão fazer com (π) o mesmo ângulo que a hélice e sua transformada farão com (π), sendo este ângulo por sua vez idêntico aos das tangentes com (π).
Desta forma garantimos escolher uma altura de passo reduzido (h) de tal forma que as geratrizes do cone sejam paralelas às tangentes a HCN.



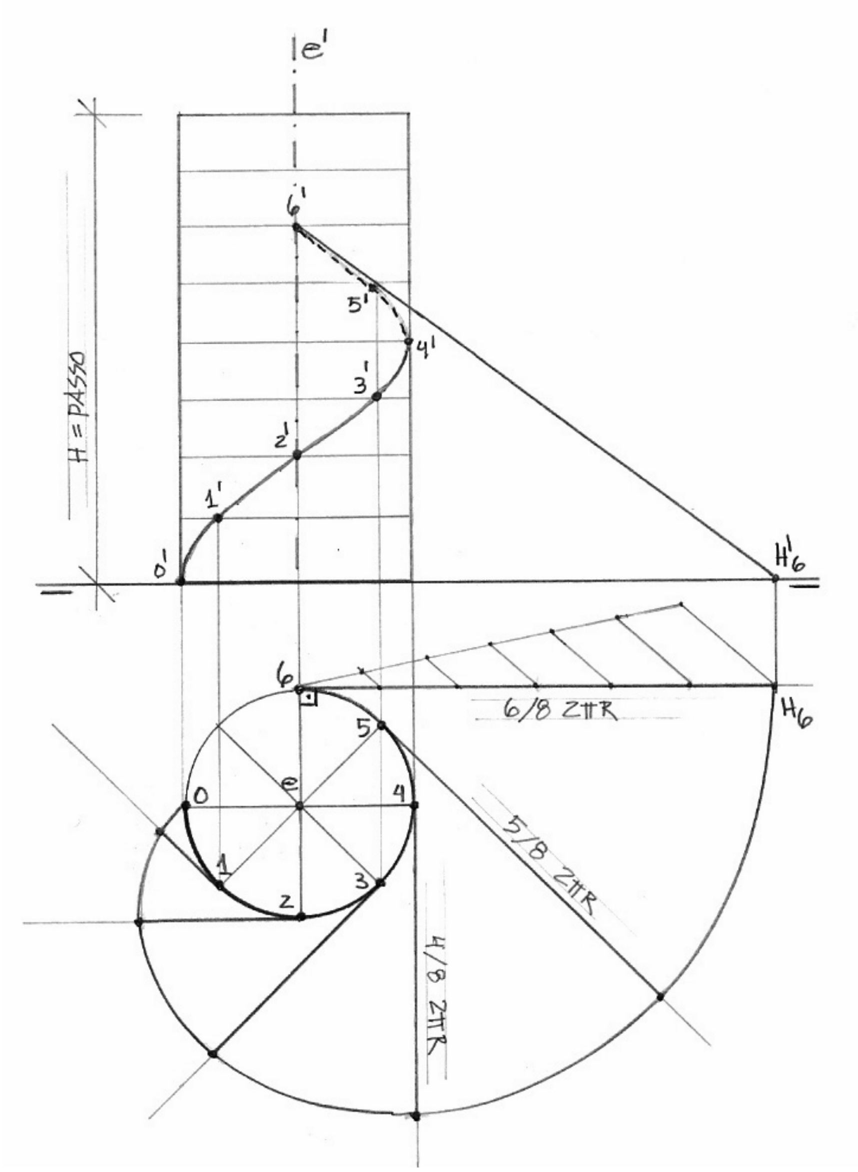


Passamos então para a épura, construindo em épura o cone das tangentes com base coincidente com a base do cilindro núcleo e com a altura igual ao seu passo reduzido (h) já calculado. *(ver figura ao lado)*
Poderemos, por exemplo, encontrar a tangente à hélice no seu ponto (6), ponto de cota 6/8 de espira. Basta apenas procurar no cone das tangentes qual geratriz correspondente seria paralela à tangente a hélice no ponto (6), daí é só passar a paralela por (6) e determinamos a tangente.
Repetimos o mesmo traçado para os demais pontos.

- Processo das Subtangentes:

É o processo mais usado por proporcionar maior precisão de traçado. Consiste em calcularmos o comprimento das subtangentes e marcarmos estes comprimentos diretamente em épura, no plano de projeção da seção reta do cilindro núcleo (π).

Exemplo: passar a tangente à hélice pelo ponto de cota 6/8 de espira. *(ver figura ao lado)*
Calculamos o comprimento da subtangente que vem a ser, neste caso, 6/8 de $2\pi R$ (que é o tamanho do arco de circunferência retificado).
Aplicamos este tamanho em projeção horizontal e temos na extremidade deste segmento o traço horizontal da tangente (H_6).
Achamos a projeção vertical de (H_6) e a ligamos à projeção vertical de (6).
Fazemos o mesmo para os demais pontos.



<u>Superfícies de Circunvolução</u>:

Definição: <u>são as superfícies geradas por uma circunferência geratriz cujo centro percorre uma outra curva diretriz</u> (ex.: circunferência/ hélice), mantendo sempre a geratriz uma determinada posição em relação à diretriz (ex.: perpendicularismo).

São Superfícies de Circunvolução:

1. <u>Toro Circular</u>[4];

2. <u>Helicóides Circulares</u>[5]:

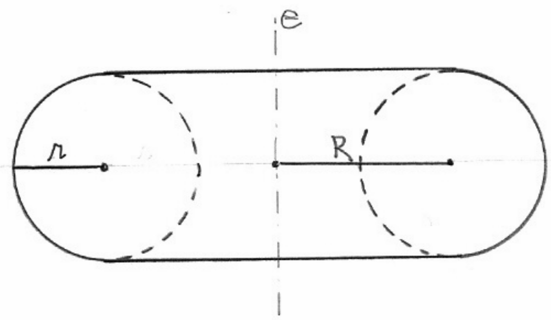
- Serpentina;
- Coluna Torsa;
- Parafuso de Santo Egídio.

<u>Toro Circular</u>:

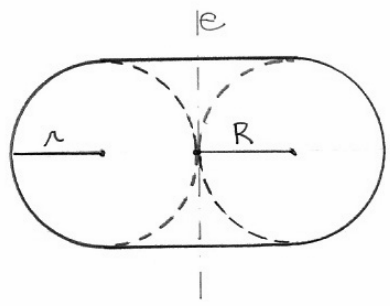
Diferentemente dos <u>Helicóides Circulares</u> onde a <u>curva diretriz</u> é uma <u>Hélice Cilíndrica Normal</u>, no <u>Toro Circular</u> a <u>curva diretriz</u> é uma <u>circunferência</u>, temos no processo de geração da superfície uma <u>circunferência geratriz</u> cujo centro percorre esta <u>circunferência diretriz</u> perpendicularmente.

Tipos de Toro Circular:

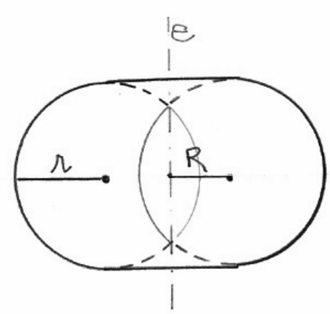
- **Aberto:**
  (r) < (R)



- **Fechado:**
  (r) = (R)



- **Reentrante:**
  (r) > (R)



Obs.: **(r)** = raio da circunferência **<u>geratriz</u>**
(R) = raio da circunferência **<u>diretriz</u>**

---

[4] No Toro Circular a circunferência geratriz percorre perpendicularmente com o seu centro uma curva diretriz que é uma outra circunferência.
[5] Nos Helicóides Circulares o centro de uma circunferência geratriz percorre uma curva diretriz que é uma Hélice Cilíndrica Normal (HCN).

Seções no Toro Circular:

- Por planos <u>perpendiculares ao eixo</u>:

-circunferências.

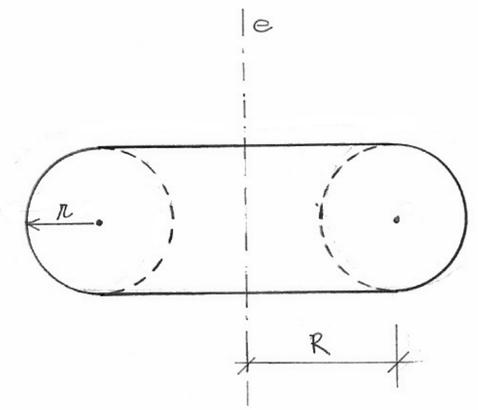
- Por planos que <u>contenham o eixo</u>:

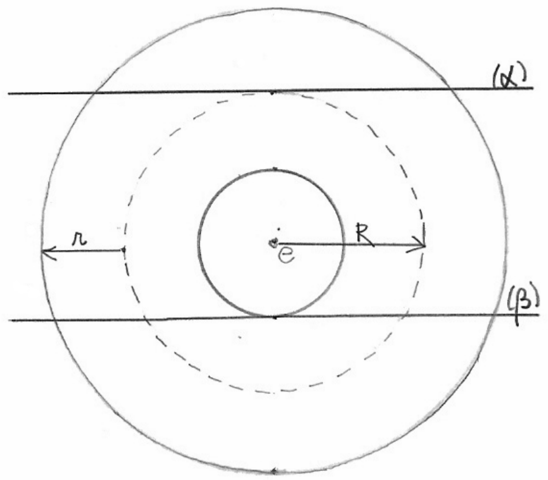
-duas das circunferências geratrizes em V.G.

- Por Planos <u>paralelos ao eixo</u>:

-seções que serão curvas chamadas cassinianas.

Obs.: quando <u>(R) (raio da circunferência diretriz) for igual a duas vezes (r) (raio da circunferência geratriz)</u> algumas destas seções cassinianas terão propriedades e nomes particulares, tais como:

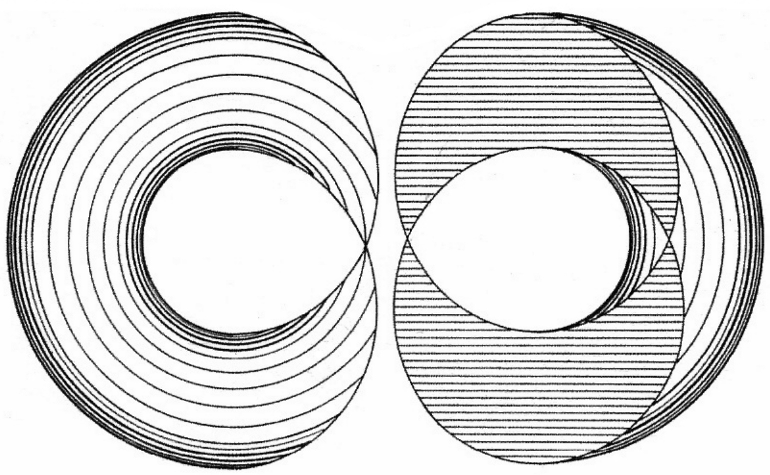


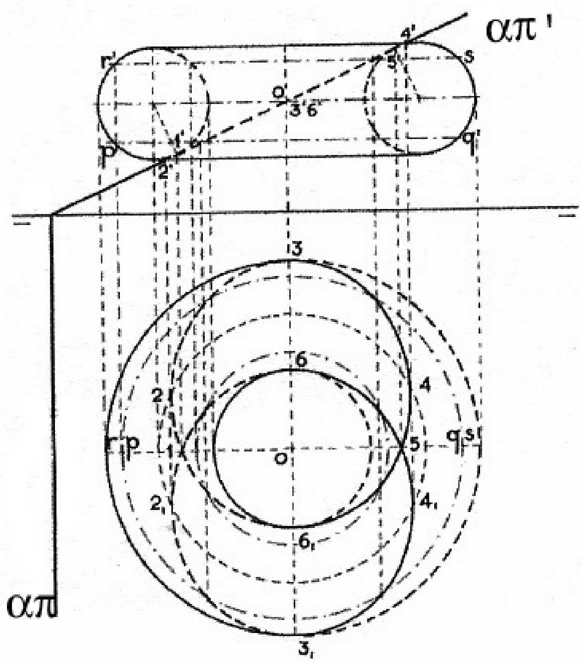


-Seção produzida pelo plano (α) no toro: chamada de <u>Oval de Cassini</u>*****;
-Seção produzida pelo plano (β) no toro: chamada de <u>Lemniscata de Bernoulli</u>*****.
Obs: *****só quando (R) = 2 x (r).

- Por planos <u>bi-tangentes</u>:

-a seção vai ser igual a duas circunferências[6]:





---

[6] Fonte das figuras: Álvaro José Rodrigues. Geometria Descritiva. Volume II: Projetividades, Curvas e Superfícies – 1968. Rio de Janeiro. Ed. Ao Livro Técnico S.A. pp.105.